Factorisation

La *factorisation*, aussi appelée *mise en facteurs*, consiste à écrire une expression comme le produit de deux ou plusieurs facteurs. En d'autre termes, on « fait sortir » les parties communes d'une expression compliquée pour obtenir une expression plus compacte. Supposons qu'on ait l'expression $6x^2y + 15x$. Nous pouvons la simplifier en faisant sortir les facteurs communs et en les écrivant devant une parenthèse. Voyons comment on fait ça, étape par étape. L'expression a deux termes et chacun peut être séparé en ses facteurs constitutifs :

$$6x^2y + 15x = (3)(2)(x)(x)y + (5)(3)x.$$

Puisque les facteurs x et 3 apparaissent dans les deux termes, nous pouvons *les mettre en facteur* au début, comme ceci :

$$6x^2y + 15x = 3x(2xy + 5).$$

L'expression de droite met en evidence que les facteurs $3x$ sont communs aux deux termes.

Voici un autre exemple de factorisation :

$$2x^2y + 2x + 4x = 2x(xy + 1 + 2) = 2x(xy + 3).$$

Factorisation d'un trinôme

Un *trinôme du second degré* est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$. On l'appelle « trinôme » parce qu'il contient trois termes. Les constantes a, b et c sont appelées *coefficients* : a est le coefficient du terme du second degré ou terme quadratique (c'est celui qui contient x^2), b est le coefficient du terme linéaire (le terme contenant x^1) et c est le terme constant.

Pour *mettre en facteurs* ou *factoriser* le trinôme $ax^2 + bx + c$, il faut le réécrire comme produit de deux facteurs de la forme $(x + ?)$:

$$ax^2 + bx + c = a(x + p)(x + q).$$

Lorsque c'est possible, il est utile de représenter les trinômes du second degré sous la « forme factorisée » pour mieux comprendre leurs propriétés, comme illustré dans l'exemple ci-dessous.

Factoring

Factoring involves "taking out" the common parts of a complicated expression in order to make the expression more compact. Suppose we're given the expression $6x^2y + 15x$. We can simplify this expression by taking out the common factors and writing them in front of a bracket. Let's see how this is done step by step. The expression has two terms and each term can be split into its constituent factors :

$$6x^2y + 15x = (3)(2)(x)(x)y + (5)(3)x.$$

Since factors x and 3 appear in both terms, we can *factor them out* to the front like this :

$$6x^2y + 15x = 3x(2xy + 5).$$

The expression on the right shows $3x$ is common to both terms.

Here's another example where factoring is used :

$$2x^2y + 2x + 4x = 2x(xy + 1 + 2) = 2x(xy + 3).$$

Factoring quadratic expressions

A *quadratic expression* is an expression like $ax^2 + bx + c$, which contains x^2, x, and constant terms. The constants a, b, and c are called *coefficients*. The coefficient of the quadratic term (the term containing x^2) is a, the coefficient of the linear term (the term containing x^1) is b, and c is the constant term.

To *factor* the quadratic expression $ax^2 + bx + c$ is to rewrite it as the product of two factors of the form $(x + ?)$:

$$ax^2 + bx + c = a(x + p)(x + q).$$

It's often useful to rewrite quadratic expressions in "factored form" to better understand their properties, as shown in the next example.

Exemple Supposons que nous voulions étudier les propriétés de la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Quelles sont les *racines* de cette fonction ? C'est à dire quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$?

Mettre en facteurs le trinôme $x^2 - 5x + 6$ nous aidera à voir plus clairement ces propriétés et répondre à la question. Dans ce cas, on peut écrire le trinôme comme produit de deux facteurs :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Sous cette forme, on voit d'un seul coup d'œil que les racines de $f(x)$ sont $x = 2$ et $x = 3$. Quand $x = 2$ le facteur $(x-2)$ est nul et donc $f(x) = 0$. De même, si $x = 3$ le facteur $(x-3)$ est nul et donc $f(x) = 0$.

Comment avons-nous su que les facteurs de $x^2 - 5x + 6$ sont $(x-2)$ et $(x-3)$? Pour trouver les facteurs d'un trinôme du second degré, nous supposons que les deux facteurs sont $(x+p)$ et $(x+q)$ pour certaines inconnues p et q, et on calcule leur produit :

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq.$$

Notez que le coefficient du terme linéaire est la somme des deux inconnues $(p+q)$, tandis que le terme constant est leur produit pq.

Pour certains trinômes du second degré simples comme celui que nous venons de voir, il vous suffit de « deviner » quels sont les valeurs de p et q. Dans l'exemple ci-dessus, nous cherchions deux nombres dont la somme est -5 et dont le produit est 6, et nous avons trouvé $p = -2$ et $q = -3$. L'approche par essais et erreurs est une stratégie efficace pour le type de problèmes que vous rencontrerez dans des devoirs et des examens. Les professeurs de maths choisissent souvent des nombres simples comme ± 1, ± 2, ± 3 ou ± 4 pour les inconnues. Pour des trinômes plus compliqués, vous devrez vous servir de la *formule quadratique* qui fera l'objet de la section 2.2.

Trinômes du second degré communs

Regardons maintenant quelques cas communs de trinômes du second degré que l'on obtient par la multiplication de deux facteurs de la forme $(x + ?)$.

On appelle *différence de carrés* des expressions comme :

$$x^2 - p^2 = (x+p)(x-p).$$

Example Suppose we're asked to describe the properties of the function $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Specifically, we're asked to find the values of x for which the function is equal to zero.

Factoring the expression $x^2 - 5x + 6$ will help us see its properties more clearly. The factored form of this quadratic expression is

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

We now see at a glance that the two values of x for which $f(x) = 0$ are $x = 2$ and $x = 3$. When $x = 2$ the factor $(x-2)$ is zero and hence $f(x) = 0$. Similarly if $x = 3$ the factor $(x-3)$ is zero, so $f(x) = 0$.

How did we know that the factors of $x^2 - 5x + 6$ are $(x-2)$ and $(x-3)$? Finding the factors of a quadratic expression requires using starting from the desired result and working backward to fill in the values. If we assume the two factors are $(x+p)$ and $(x+q)$ for some unknown constants p and q, then we know their product gives :

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq.$$

Observe that the linear term on the right-hand side contains the sum of the unknowns $(p+q)$, while the constant term is their product pq.

For certain simple quadratics like the one above, you can simply *guess* what the values of p and q that fit. In the above example, we were looking for the two numbers whose sum is -5 and whose product is 6, and we found $p = -2$ and $q = -3$. This trial and error is an effective strategy for many of the factoring problems you'll be asked to solve, since math teachers often choose simple numbers like ± 1, ± 2, ± 3, or ± 4 for the constants. For more complicated quadratic expressions, you'll need to use the quadratic formula, which we'll talk about in Section 2.2.

Common quadratic forms

Let's now look at some common quadratic expressions that you might encounter when multiplying two factors of the form $(x + ?)$.

Il n'y a pas de terme linéaire parce que le terme $-xp$ s'annule avec le terme px lorsqu'on développe les parenthèses. Chaque fois que vous verrez une expression de la forme $a^2 - b^2$, sachez que vous pourriez la réécrire comme le produit $(a+b)(a-b)$.

Un *trinôme carré parfait* est une expression obtenue lorsque la constante dans les deux facteurs est la même :

$$x^2 + 2px + p^2 = (x+p)(x+p) = (x+p)^2.$$

Notez que $x^2 - 2qx + q^2 = (x-q)^2$ est également un carré parfait. En général on a l'équation $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ pour tout a et b.

Complétion du carré

Nous allons maintenant découvrir une ancienne technique d'algèbre appelée *complétion de carré* qui nous permet de réécrire tout trinôme du second degré $x^2 + Bx + C$ comme la somme d'un carré parfait et une constante $(x+p)^2 + k$. Cette technique d'algèbre a été décrite dans un des premiers livres sur l'algèbre, écrit par Al-Khwarizmi vers l'an 800 de notre ère.

Réécrivons d'abord $x^2 + Bx + C$ en divisant le terme linéaire en deux parties égales :

$$x^2 + \tfrac{B}{2}x + \tfrac{B}{2}x + C.$$

Nous pouvons interpréter géométriquement les trois premiers termes comme suit : le terme x^2 correspond à un carré de coté x, tandis que les deux termes $\frac{B}{2}x$ correspondent à des rectangles de côtés $\frac{B}{2}$ et x. Voir la partie gauche de la figure 2.2 pour une illustration.

A quadratic expression is a *difference of squares* if it looks like this :

$$x^2 - p^2 = (x+p)(x-p).$$

You can verify this equation is correct by expanding the brackets on the right-hand side. The linear terms is not there because the $-xp$ term cancels the px term. This means anytime you see an expression of the form $a^2 - b^2$, you know it's coming from the product of the two terms $(a+b)(a-b)$.

A *perfect square* is a quadratic expression obtained from the product of repeated factors $(x+p)$:

$$x^2 + 2px + p^2 = (x+p)(x+p) = (x+p)^2.$$

Note $x^2 - 2qx + q^2 = (x-q)^2$ is also a perfect square. In general, the equation $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ holds for all values of a and b.

Completing the square

In this section we'll learn about an ancient algebra technique called *completing the square*, which allows us to rewrite *any* quadratic expression of the form $x^2 + Bx + C$ as a perfect square plus some constant correction factor $(x+p)^2 + k$. This algebra technique was described in one of the first books on *al-jabr* (algebra), written by Al-Khwarizmi around the year 800 CE.

First let's rewrite the quadratic expression $x^2 + Bx + C$ by splitting the linear term intro two equal parts :

$$x^2 + \tfrac{B}{2}x + \tfrac{B}{2}x + C.$$

We can interpret the first three terms geometrically as follows : the x^2 term corresponds to a square with side length x, while the two $\frac{B}{2}x$ terms correspond to rectangles with sides $\frac{B}{2}$ and x. See the left side of Figure 2.2 for an illustration.

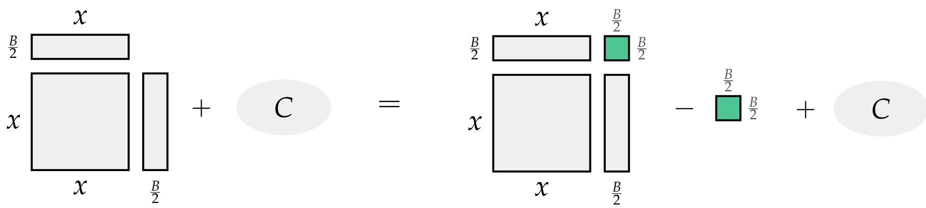

FIGURE 2.2 Pour compléter le carré dans l'expression $x^2 + Bx + C$, nous ajoutons la quantité $(\frac{B}{2})^2$, ce qui correspond à l'aire du petit carré de couleur foncée. Nous soustrayons également $(\frac{B}{2})^2$ pour maintenir l'égalité.

Le carré d'aire x^2 et les deux rectangles peuvent être placés pour former un carré plus grand de coté $\left(x + \frac{B}{2}\right)$. Notez qu'il manque un petit carré de côté $\frac{B}{2}$ dans le coin. Pour *compléter le carré*, nous pouvons ajouter un terme $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ à cette expression. Pour préserver l'égalité on doit aussi soustraire $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ à l'expression. On obtient alors :

$$\begin{aligned} x^2 + \tfrac{B}{2}x + \tfrac{B}{2}x + C &= \underbrace{x^2 + \tfrac{B}{2}x + \tfrac{B}{2}x + \left(\tfrac{B}{2}\right)^2} - \left(\tfrac{B}{2}\right)^2 + C \\ &= \qquad \left(x + \tfrac{B}{2}\right)^2 \qquad - \left(\tfrac{B}{2}\right)^2 + C. \end{aligned}$$

Le coté droit de l'équation décrit l'aire du grand carré de côté $\left(x + \frac{B}{2}\right)$, moins l'aire du petit carré $\left(\frac{B}{2}\right)^2$, plus la constante C, comme illustré dans la figure 2.2.

Nous pouvons résumer la complétion de carré comme suit :

$$x^2 + Bx + C = \left(x + \tfrac{B}{2}\right)^2 + C - \left(\tfrac{B}{2}\right)^2.$$

Le point essentiel à retenir est que la constante qui va à l'intérieur des parenthèses est égale **la moitié du coefficient du terme linéaire**, et nous ajustons l'équation en soustrayant le carré de cette constante.

Résoudre les équations du second degré

Supposons que nous voulions résoudre l'équation du second degré $x^2 + Bx + C = 0$. Il n'est pas possible de la résoudre en utilisant l'approche « creuser en direction de x » vue à la section 1.1, puisque x apparaît à la fois dans le terme quadratique x^2 et dans le terme linéaire Bx. La complétion de carré nous permettra de résoudre cette équation.

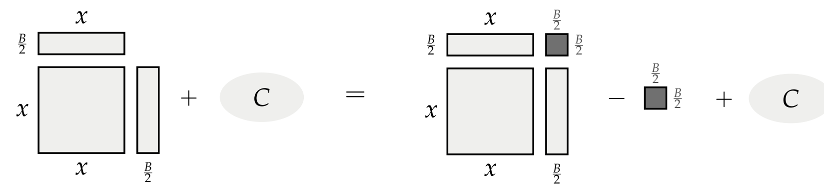

FIGURE 2.2 To complete the square in the expression $x^2 + Bx + C$, we need to add the quantity $(\frac{B}{2})^2$, which corresponds to a square with sides equal to half the coefficient of the linear term (shown in darker color). We also subtract $(\frac{B}{2})^2$ so the overall value of the expression remains unchanged.

The square with area x^2 and the two rectangles can be positioned to form a larger square with side length $\left(x + \frac{B}{2}\right)$. Note there is a small piece of sides $\frac{B}{2}$ by $\frac{B}{2}$ missing from the corner. To *complete the square*, we can add a term $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ to this expression. To preserve the equality, we also subtract $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ from the expression to obtain :

$$\begin{aligned} x^2 + \tfrac{B}{2}x + \tfrac{B}{2}x + C &= \underbrace{x^2 + \tfrac{B}{2}x + \tfrac{B}{2}x + \left(\tfrac{B}{2}\right)^2} - \left(\tfrac{B}{2}\right)^2 + C \\ &= \qquad \left(x + \tfrac{B}{2}\right)^2 \qquad - \left(\tfrac{B}{2}\right)^2 + C. \end{aligned}$$

The right-hand side of this equation describes the area of the square with side length $\left(x + \frac{B}{2}\right)$, minus the area of the small square $\left(\frac{B}{2}\right)^2$, plus the constant C, as illustrated in the right side of Figure 2.2.

We can summarize the complete-the-square trick as follows :

$$x^2 + Bx + C = \left(x + \tfrac{B}{2}\right)^2 + C - \left(\tfrac{B}{2}\right)^2.$$

The key thing to remember is that the constant that goes inside the bracket is **half of the coefficient of the linear term**, and we "fix-up" the equation by subtracting the square of this constant.

Solving quadratic equations

Suppose we want to solve the quadratic equation $x^2 + Bx + C = 0$. It's not possible to solve this equation using the digging-towards-the-x approach that we learned in Section 1.1 since x appears both in the quadratic term x^2 and in the linear term Bx.

Exemple Trouvons les solutions de l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$. Le coefficient du terme linéaire dans l'expression quadratique est $B = 5$, donc le terme constant que nous devons ajouter à l'intérieur des parenthèses est $\frac{B}{2} = \frac{5}{2}$. Le « facteur d'ajustement » que nous devons soustraire dans les constantes est $\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$. En suivant la recette pour compléter le carré, on obtient :

$$x^2 + 5x + 6 = \left(x + \tfrac{5}{2}\right)^2 + 6 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = 0.$$

Ensuite, nous utilisons un peu d'arithmétique pour simplifier les termes constants : $6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{4} - \frac{25}{4} = \frac{24-25}{4} = \frac{-1}{4} = -0{,}25$. Après ces étapes, il nous reste l'équation suivante :

$$(x + 2{,}5)^2 - 0{,}25 = 0,$$

que nous pouvons maintenant résoudre en utilisant l'approche de « creuser en direction de x ». D'abord, nous déplaçons 0,25 du coté droit de l'équation, puis on prend la racine carrée des deux côtés pour obtenir $(x + 2{,}5) = \pm 0{,}5$. On simplifie pour obtenir $x = -2{,}5 \pm 0{,}5$ et donc les deux solutions sont $x = -2$ et $x = -3$. Vous pouvez vérifier que ce sont les bonnes solutions en substituant ces valeurs dans l'équation originale $(-2)^2 + 5(-2) + 6 = 0$ et $(-3)^2 + 5(-3) + 6 = 0$. Félicitations ! Vous venez de résoudre une équation du second degré en utilisant une technique d'algèbre qui date de plus de 1200 ans !

Dans la section suivante, nous apprendrons comment utiliser la complétion du carré pour obtenir une formule « tout usage » qui nous permettra de résoudre les équations quadratiques très rapidement.

Exercices

E2.1 Mettez en facteurs les expressions suivantes :

a) $x^2 - 8x + 7$ **b)** $x^2 + 4x + 4$ **c)** $x^2 - 9$

Indice: devinez les valeurs de p et q dans l'expression $(x + p)(x + q)$.

E2.2 Résoudre les équations en utilisant la complétion de carré.

However, applying the completing-the-square trick will allow us to solve this equation.

Example Let's find the solutions of the equation $x^2 + 5x + 6 = 0$. The coefficient of the linear term in the quadratic expression is $B = 5$, so the constant term we need to add inside the bracket is $\frac{B}{2} = \frac{5}{2}$. The "fix-up" factor we must subtract outside the bracket is $\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$. Completing the square for this quadratic equation gives us :

$$x^2 + 5x + 6 = \left(x + \tfrac{5}{2}\right)^2 + 6 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = 0.$$

Next we use some fraction arithmetic to simplify the constant terms in the expression : $6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{4} - \frac{25}{4} = \frac{24-25}{4} = \frac{-1}{4} = -0.25$. After these steps, we're left with the following equation :

$$(x + 2.5)^2 - 0.25 = 0,$$

which we can now solve using the standard digging-towards-the-x approach. First we move 0.25 to right-hand side, then we take the square root on both sides of the equation to obtain $(x + 2.5) = \pm 0.5$, which can further be simplified to $x = -2.5 \pm 0.5$. The two solutions are $x = -2.5 + 0.5 = -2$ and $x = -2.5 - 0.5 = -3$. You can verify these are the correct solutions by substituting the values in the original equation $(-2)^2 + 5(-2) + 6 = 0$ and $(-3)^2 + 5(-3) + 6 = 0$. Congratulations, you just solved you first quadratic equation using a 1200-year-old algebra technique!

In the next section, we'll learn how to leverage the complete-the-square trick to obtain a general-purpose formula for quickly solving quadratic equations.

Exercises

E2.1 Factor the following quadratic expressions :

a) $x^2 - 8x + 7$ **b)** $x^2 + 4x + 4$ **c)** $x^2 - 9$

Indice: Guess the values p and q in the expression $(x + p)(x + q)$.

E2.2 Solve the equations by completing the square.