Définitions

On utilise la notation

$$f\colon A \to B$$

pour décrire la *fonction* f qui prend ses entrées dans l'ensemble A et a ses sorties dans l'ensemble B. On appelle A l'*ensemble de départ* de la fonction et B l'*ensemble d'arrivée*. La fonction prend ses entrées x dans A et donne des sorties $f(x)$ dans B. Dans ce livre nous étudierons surtout les fonctions du type $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prennent des nombres réels comme entrées et donnent des nombres réels comme sorties.

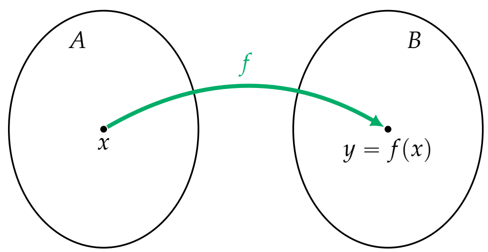

FIGURE 5.1 Une représentation abstraite d'une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B. La fonction f est la flèche qui *envoie* les entrées x de A vers les sorties $f(x)$ dans B. La valeur de sortie $f(x)$ de la fonction est parfois notée y.

Une fonction f n'est pas un nombre ; c'est plutôt une « action » qui prend un nombre d'entrée x et donne une valeur de sortie $f(x)$, qui se lit « f de x ». On dit « f envoie x en $f(x)$ ».

Nous allons maintenant définir quelques termes techniques qui servent à décrire les ensembles d'entrées et de sorties des fonctions.

- A : l'*ensemble de départ* de la fonction décrit le type de nombres que la fonction prend comme entrées. Le mot « source » est parfois utilisé comme synonyme pour l'ensemble de départ.
- $\text{Dom}(f)$: le *domaine* de la fonction est l'ensemble des valeurs permises comme entrées de la fonction. Le domaine de la fonction peut aussi être appelé « ensemble de définition » — l'ensemble des nombres pour lesquels la fonction est définie.
- B : l'*ensemble d'arrivée* d'une fonction décrit le type de sorties de la fonction. Le mot « but » est un synonyme pour l'ensemble d'arrivée.
- $\text{Im}(f)$: l'*image* de la fonction f est l'ensemble de toutes les valeurs de sortie effectivement données par la fonction.

Definitions

A *function* is a mathematical object that takes numbers as inputs and produces numbers as outputs. We use the notation

$$f\colon A \to B$$

to denote a function from the input set A to the output set B. In this book, we mostly study functions that take real numbers as inputs and give real numbers as outputs : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

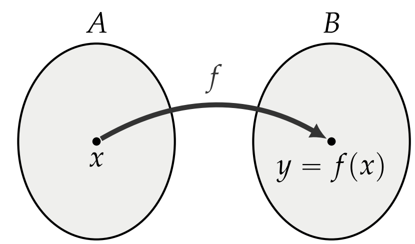

FIGURE 5.1 An abstract representation of a function f from the set A to the set B. The function f is the arrow which *maps* each input x in A to an output $f(x)$ in B. The output of the function $f(x)$ is also denoted y.

A function is not a number ; rather, it is a *mapping* from numbers to numbers. We say "f maps x to $f(x)$." For any input x, the output value of f for that input is denoted $f(x)$, which is read as "f of x."

We'll now define some fancy technical terms used to describe the input and output sets of functions.

- A : the *source set* of the function describes the types of numbers that the function takes as inputs.
- $\text{Dom}(f)$: the *domain* of a function is the set of allowed input values for the function.
- B : the *target set* of a function describes the type of outputs the function has. The target set is sometimes called the *codomain*.
- $\text{Im}(f)$: the *image* of the function is the set of all possible output values of the function. The image is sometimes called the *range*.

See Figure 5.2 for an illustration of these concepts. The purpose of introducing all this math terminology is so we'll have words

Regardez la figure 5.2 pour une illustration de ces concepts. Nous introduisons toute cette terminologie mathématique dans le but de distinguer entre le type général d'entrées et de sorties de la fonction (nombres réels, nombres complexes, vecteurs) et les propriétés spécifiques de la fonction comme son domaine et son image.

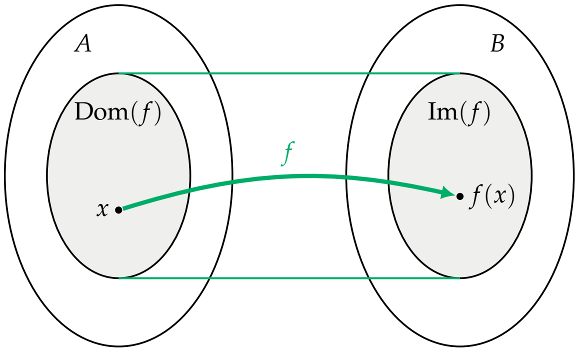

FIGURE 5.2 Illustration des ensembles d'entrée et de sortie de la fonction $f\colon A \to B$. On note A l'*ensemble de départ* et $\text{Dom}(f)$ le *domaine* de la fonction. Remarquez que le domaine de la fonction est un sous-ensemble de l'ensemble de départ. On note B l'*ensemble d'arrivée* et $\text{Im}(f)$ l'*image* de la fonction. L'image de la fonction est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée.

Les lecteurs familiers avec les concepts de l'informatique peuvent penser à l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée comme la *signature de type* de la fonction, qui définit les types de données acceptables pour une fonction et nous empêche d'utiliser le mauvais type d'entrées (ne pas donner des vecteurs à une fonction qui prend des nombres comme entrées). Le domaine et l'image des fonctions sont comme la documentation spécifique à la fonction qui fournit les détails sur les nombres autorisés comme entrées et les nombres que vous pouvez vous attendre à recevoir comme sorties.

Pour comprendre la différence entre l'ensemble de départ et le domaine d'une fonction, considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$, telle qu'illustrée dans la figure 5.3. L'ensemble de départ de la fonction est tout l'ensemble des nombres réels, mais seulement les nombres réels non négatifs sont permis comme entrées de la fonction, puisque la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas définie pour les nombres négatifs. Le domaine de la fonction n'est donc formé que des nombres réels non négatifs : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$. Connaître le domaine d'une fonction est essentiel pour pouvoir

to distinguish between the general types of inputs and outputs of the function (real numbers, complex numbers, vectors) from the specific properties of the function like its domain and image.

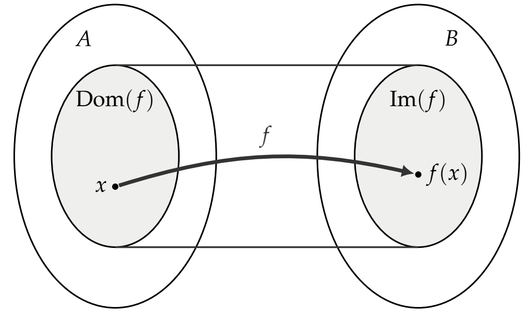

FIGURE 5.2 Illustration of the input and output sets of the function $f\colon A \to B$. The *source set* is denoted A and the *domain* is denoted $\text{Dom}(f)$. Note that the function's domain is a subset of its source set. The *target set* is denoted B and the *image* is denoted $\text{Im}(f)$. The image set is a subset of the target set.

Borrowing some concepts from computer science, we could say that the source set and the target set are like the function's *type signature*, which prevents us from using the wrong kind of inputs (like feeding vectors into a function that expects numbers as inputs). The functions' domain and image are like the function's documentation since they provide the details of exactly what numbers are allowed as inputs and what numbers you can expect to see as outputs.

To illustrate the difference between the source set and the domain of a function, consider the function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = \sqrt{x}$, which is shown in Figure 5.3. The source set of f is the set of real numbers, but only nonnegative real numbers are allowed as inputs, since $\sqrt{x}$ is not defined for negative numbers. Therefore, the domain of the function is only the nonnegative real numbers : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$. Knowing the domain of a function is essential in order to use it correctly. Whenever you use the square root function, you need to make sure that the inputs to the function are nonnegative numbers.

This complicated-looking expression between the curly brackets uses *set notation* to define the set of nonnegative numbers l'utiliser correctement. Chaque fois que vous utiliserez la fonction racine carrée, je veux que vous preniez le temps de vous assurer que la valeur d'entrée de la fonction est bien un nombre non négatif.

Ne vous en faites pas trop pour l'expression entre les accolades qui a l'air compliquée et utilise des symboles extraterrestres. Ce n'est qu'une notation mathématique (appelée *notation ensembliste*) que l'on utilise pour définir de façon précise l'ensemble des nombres non négatifs. Écrite avec des mots, l'expression $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ devient « tout les nombres réels x supérieurs ou égaux à zéro » ce qui serait plus long et ennuyeux à écrire. Nous discuterons de la notation ensembliste avec plus de détails dans le chapitre 8 ; l'usage des accolades dans ce chapitre n'est qu'un *teaser*.

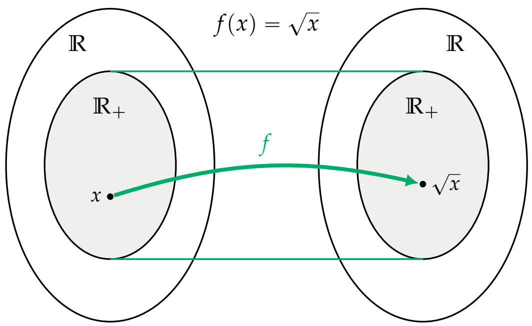

FIGURE 5.3 Illustration des ensembles d'entrée et de sortie de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Le domaine de la fonction f est l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+$. Son image est aussi $\mathbb{R}_+$.

Pour comprendre la différence entre l'ensemble d'arrivée et l'image d'une fonction, on peut regarder la fonction $f(x) = x^2$ qui est montrée dans la figure 5.4. Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R}$: les entrées de la fonction sont des nombres réels et tout nombre réel peut être une entrée. L'ensemble d'arrivée de la fonction est $\mathbb{R}$, mais tous les nombres réels ne sont pas des sorties possibles. L'*image* de la fonction $f(x) = x^2$ n'est formée que des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ \equiv \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$, puisque on a $f(x) \geqslant 0$ pour toutes les entrées x.

$\mathbb{R}_+$. In words, the expression $\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ states "$\mathbb{R}_+$ is defined as the set of all real numbers x such that x is greater than or equal to zero." We'll discuss set notation in more detail in Section 8.3. For now, you just need to remember that $\mathbb{R}_+$ represents the set of nonnegative real numbers.

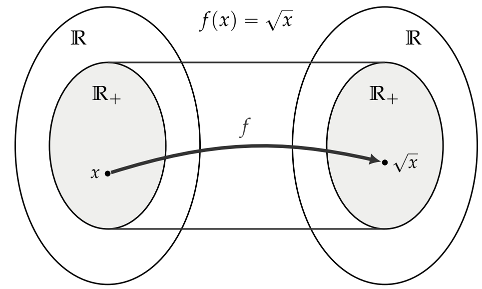

FIGURE 5.3 The input and output sets of the function $f(x) = \sqrt{x}$. The domain of f is the set of nonnegative real numbers $\mathbb{R}_+$ and its image is also $\mathbb{R}_+$.

To illustrate the difference between the image of a function and its target set, let's look at the function $f(x) = x^2$ that is shown in Figure 5.4. The quadratic function is of the form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. The function's domain is $\mathbb{R}$ (it takes real numbers as inputs) and its target set is $\mathbb{R}$ (the outputs are real numbers too); however, not all real numbers are possible outputs. The *image* of the function $f(x) = x^2$ consists only of the nonnegative real numbers $\mathbb{R}_+ \equiv \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$, since $f(x) \geqslant 0$ for all x.

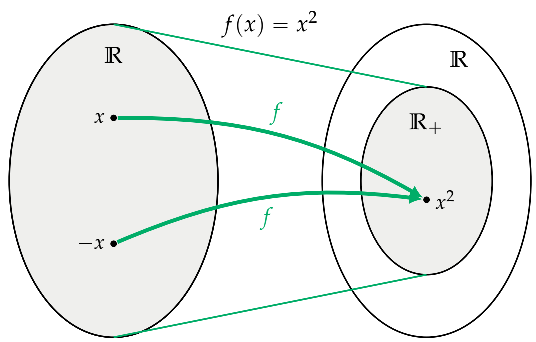

FIGURE 5.4 La fonction $f(x) = x^2$ est définie pour tous les nombres réels : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. L'image de la fonction est l'ensemble de nombres réels non négatifs : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. La fonction f n'est pas *injective* puisqu'elle envoie les entrées x et $-x$ sur la même sortie $f(x)$. La fonction f n'est pas *surjective* puisque l'*image* de la fonction ($\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$) n'est pas égale à son *ensemble d'arrivée* ($B = \mathbb{R}$).

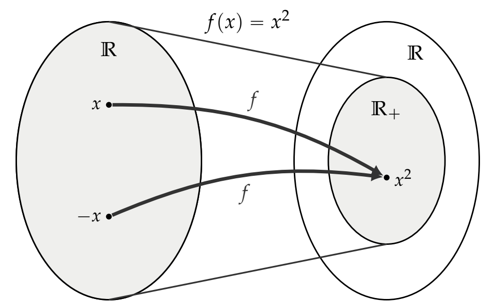

FIGURE 5.4 The function $f(x) = x^2$ is defined for all reals : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. The image of the function is the set of nonnegative real numbers : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. The f function is not injective since it sends the inputs x and $-x$ to the same output $f(x)$. The function f is not surjective since the *image* of the function ($\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$) is not equal to its *target set* ($B = \mathbb{R}$).

Terminologie

On utilise la terminologie suivante pour décrire les différents types de fonctions :

— Une fonction est *injective* si elle envoie deux entrées différentes sur deux sorties différentes. Si x_1 et x_2 sont deux valeurs d'entrée telles que $x_1 \neq x_2$, alors pour une fonction injective on a aussi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

— Une fonction est *surjective* si l'image de la fonction est égale à l'ensemble d'arrivée de la fonction. Pour tout y dans l'ensemble d'arrivée d'une fonction surjective, il existe au moins un x dans son domaine tel que $f(x) = y$. En d'autres termes, une fonction est surjective si elle recouvre tout l'ensemble d'arrivée.

— Une fonction est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, $f: A \to B$ est une *correspondance biunivoque* ou « un à un » entre l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Pour chaque sortie possible y dans B, il existe une entrée x dans A telle que $f(x) = y$ parce que f est surjective. De plus, l'entrée x qui donne y comme sortie est unique parce que f est injective.

La notion de « fonction injective » nous invite à penser à la fonction comme un transport de fluide qui ne peut pas être comprimé. Si on imagine deux points x_1 et x_2 dans le « fluide d'entrée » d'une fonction injective, alors il y aura deux points différentes dans le « fluide de sortie » de la fonction. Les fonctions injectives sont aussi appelées fonctions « *deux à deux* ». Par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est injective puisque qu'il n'y a qu'une seule valeur d'entrée x qui mène à chaque valeur de sortie $f(x)$.

En revanche, si la fonction n'est pas injective elle peut envoyer plusieurs entrées différentes sur la même sortie. La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas injective puisque les entrées x et $-x$ sont envoyées sur la même valeur de sortie $f(x)$ (voir la figure 5.4).

Une fonction est surjective si elle « couvre » tout son ensemble d'arrivée avec des valeurs de sortie. L'image est tout l'ensemble d'arrivée. Par exemple, la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est surjective puisque son image est l'ensemble des nombres réels, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, tel qu'illustré dans la figure 5.5. Pour tout nombre réel y, il existe au moins une valeur d'entrée x pour laquelle la valeur de sortie $f(x)$ est égale à y. Spécifiquement, le nombre x est la racine cubique $x = \sqrt[3]{y}$.

En revanche, les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = x^2$ ne sont pas surjectives puisque leurs images ne sont formées que

Terminology

We use following terminology to classify the type of mapping that a function performs :

— A function is *injective* if it maps two different inputs to two different outputs. If x_1 and x_2 are two input values such as $x_1 \neq x_2$, then we also have $f(x_1) \neq f(x_2)$.

— A function is *surjective* if the image of the function is equal to its target set. For every y in the target set of a surjective function, there is at least one x in its domain such that $f(x) = y$.

— A function is *bijective* if it is both injective and surjective. In this case, $f : A \to B$ is a *one-to-one correspondence* between the source set A and the target set B. For each of the possible outputs y in B, there *exists* an entry x in A such that $f(x) = y$ because f is surjective. In addition, the input x which produces the output y is *unique* because f is injective.

The term *injective* invites us to think of functions as pipes that transport fluids. Since fluids cannot be compressed, the output space must be at least as large as the input space. If we imagine two points x_1 and x_2 in the "input fluid" of an injective function, then there will be two different points in the "output fluid" of the function. A synonym for an injective functions is to say they are *one-to-one* or *two-to-two*. For example the function $f(x) = \sqrt{x}$ is injective since there is only one input value x which leads to each output value $f(x)$.

In contrast, non-injective functions can map several different inputs to the same output value. The function $f(x) = x^2$ is not injective since it sends inputs x and $-x$ to the same output value $f(x)$, as illustrated in Figure 5.4.

A function is surjective if its outputs "cover" the entire target set. For example, the function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x^3$ is surjective since its image is the whole set of real numbers, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, as illustrated in Figure 5.5. The adjective *onto* is a synonym for surjective.

On the other hand, the function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by the equation $f(x) = x^2$ is not surjective since its image set is the nonnegative numbers $\mathbb{R}_+$, which not the whole set of real numbers (see Figure 5.4). The negative numbers of the target set are not covered des nombres non négatifs $\mathbb{R}_+$ ce qui ne couvre pas tous les nombres réels. Référez vous aux figures 5.3 et 5.4 qui montrent les images de ces fonctions. Les nombres négatifs de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ ne sont pas « atteints » par ces fonctions, parce qu'il n'y pas de nombres réel x que l'on puisse utiliser comme entrée pour obtenir une valeur de sortie négative.

Remarquons que ces propriétés dépendent du choix des ensembles de départ et d'arrivée. Par exemple $f(x) = x^2$ est surjective lorsqu'on prend $\mathbb{R}_+$ comme espace d'arrivée et injective si on prend $\mathbb{R}_+$ comme espace de départ. Donc $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective. Nous reviendrons plus longuement sur cette question.

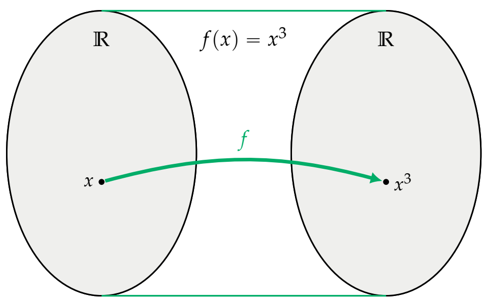

FIGURE 5.5 Pour la fonction $f(x) = x^3$ l'ensemble d'arrivée de la fonction est égal à son image, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, donc la fonction f est surjective. Tous les y dans l'image de f viennent de x différents dans le domaine de f ce qui fait que f est une fonction injective. Puisque f est une fonction surjective et injective, elle est *bijective*. On peut dire que f est une *application bijective*, ou aussi une *correspondance biunivoque*.

Les fonctions bijectives sont celles qui sont à la fois injectives et surjectives. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est un exemple de fonction bijective. Comme on l'a montré plus haut, la fonction est surjective parce que pour chaque $y \in \mathbb{R}$ il existe au moins un x tel que $f(x) = y$. La fonction est aussi injective puisqu'elle produit des sorties différentes $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour des entrées différentes $x_1 \neq x_2$.

Je sais que ça fait beaucoup de terminologie, mais en tant que votre « coach » en maths je me devais d'introduire ces concepts précis pour pouvoir bien vous expliquer celui de fonction inverse, qui est l'un des plus fondamentaux en maths.

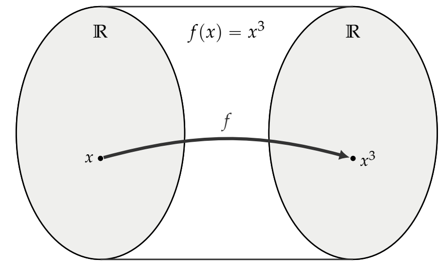

FIGURE 5.5 For the function $f(x) = x^3$ the target set of the function is equal to its image, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, therefore the function f is surjective. Each y in the image of f comes from a different x in the domain of f so f is an injective function. Since f is both surjective and injective, it is *bijective*.

by outputs of this function, because there is no real number x that can be used as input to obtain a negative output value.

A function is bijective if it is both injective and surjective. For example, the function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x^3$ is a bijective function. The function is surjective since for each $y \in \mathbb{R}$ there exists at least one x such that $f(x) = y$. The function is also injective since it produces two different outputs $f(x_1) \neq f(x_2)$ for two different inputs $x_1 \neq x_2$.

I know all this injective, surjective, bijective business is a lot of terminology to get acquainted with, but it's important that you know these terms so that you can understand the formal definition of the function inverse, which is a really important math concept.