prefer $v_y = \sqrt{\|\vec{v}\|^2 - v_x^2} = \sqrt{12^2 - 5^2} = 10.91$.

Discussion

Dans cette section nous avons montré beaucoup de calculs sur les vecteurs et passé sous silence certains détails théoriques. Maintenant que vous êtes familiers avec le côté pratique des calculs vectoriels, nous pouvons clarifier certains points techniques pour être sûr que tout soit clair.

Points et vecteurs

Nous avons utilisé la notation $\mathbb{R}^2$ pour décrire deux types d'objets mathématiques : l'ensemble des points dans le plan cartésien, et les vecteurs dans un espace à deux dimensions. Le point $P = (P_x, P_y)$ et le vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y)$ sont tous deux représentés par des paires de nombres réels, ce qui nous a amenés à utiliser la notation $P \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ pour les décrire. En effet, le couple de nombres $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ pourrait représenter les coordonnées d'un point ou les composantes d'un vecteur, selon le contexte.

Prenons un moment pour revoir les définitions des points et des vecteurs et clarifier les types d'opérations que nous pouvons effectuer sur ces deux types d'objets mathématiques :

— **Espace des points** $\mathbb{R}^2$: l'ensemble des points $P = (P_x, P_y)$ est l'ensemble des points du plan cartésien. Le point $P = (P_x, P_y)$ correspond aux instructions géométriques suivantes : « En partant de l'origine $(0, 0)$, déplacez-vous P_x unités le long de l'axe x et P_y unités le long de l'axe y. » La distance entre les points P et Q est notée $d(P, Q)$.

— **Espace vectoriel** $\mathbb{R}^2$: l'ensemble des vecteurs $\vec{v} = (v_x, v_y)$ qui décrivent des déplacements dans le plan cartésien. Le vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y)$ correspond aux instructions : « En partant de n'importe où, déplacez-vous v_x unités le long de l'axe x et v_y unités le long de l'axe y. » Les opérations suivantes peuvent être utilisées avec les vecteurs : $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \alpha\vec{u}, \vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{v}\|$.

Notez que les instructions géométriques pour les points et les vecteurs sont très similaires, la seule différence étant le point de départ. En effet, l'ensemble des points est équivalent à l'ensemble des vecteurs, si nous choisissons l'origine comme le point de départ de tous les vecteurs.

Il n'est pas possible de calculer la somme de deux points dans le plan cartésien. Que signifierait l'addition de deux points ? Il est cependant per-

Discussion

We did a lot of hands-on activities with vectors in this section and skipped over some of the theory details. Now that you've been exposed to the practical side of vector calculations, it's worth clarifying certain points that we glossed over.

Vectors vs. points

We used the notation $\mathbb{R}^2$ to describe two kinds of math objects : the set of points in the cartesian plane and the set of vectors in a two dimensional space. The point $P = (P_x,P_y)$ and the vector $\vec{v} = (v_x,v_y)$ are both represented by pairs of real numbers, so we use the notation $P \in \mathbb{R}^2$ and $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ to describe them. Indeed, a pair of numbers $(3,2) \in \mathbb{R}^2$ could represent the coordinates of a point or the components of a vector, depending on the context.

Let's take a moment to review the definitions of points and vectors and clarify the types of operations we can perform on them :

— **Space of points** $\mathbb{R}^2$: the set of points $P = (P_x,P_y)$ corresponds to locations in the Cartesian plane. The point $P = (P_x,P_y)$ corresponds to the following geometric instructions : "Starting at the origin $(0,0)$, move P_x units along the x-axis and P_y units along the y-axis." The distance between points P and Q is denoted $d(P,Q)$.

— **Vector space** $\mathbb{R}^2$: the set of vectors $\vec{v} = (v_x, v_y)$ that describe the displacements in the Cartesian plane. The vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ corresponds to the following instructions : "Starting anywhere, move v_x units along the x-axis and v_y units along the y-axis." Vectors can be combined and manipulated using the following vector algebra operations : $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\alpha\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, and $\|\vec{v}\|$.

Note the geometric instructions for points and vector are very similar, with the only difference being the starting point. Indeed, the set of points is equivalent to the set of vector if we fixing the staring point of all vectors to be the origin.

mis d'additionner les vecteurs, et le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ correspond au déplacement combiné de $\vec{u}$ suivi de $\vec{v}$.

Il est également permis d'additionner un vecteur à un point, ce qui correspond à partir du point et effectuer le déplacement défini par le vecteur. La formulation mathématique de cette situation est que l'espace vectoriel agit sur l'espace de points par translation.

Regardons un exemple de calcul qui combine les points et les vecteurs. La distance entre les points $P = (P_x, P_y)$ et $Q = (Q_x, Q_y)$ peut être calculée à partir du théorème de Pythagore : $d(P, Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$. Une autre façon de calculer la distance entre P et Q est de définir le vecteur de déplacement qui commence en P et se termine en Q, donné par $\overrightarrow{PQ} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y)$. L'équation suivante est vraie

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

Cette équation nous dit que commencer au point P et effectuer le déplacement $\overrightarrow{PQ}$ nous amènera au point Q. Pour trouver la distance entre les points P et Q, nous pouvons calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{PQ}$, qui est donnée par $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$.

Vecteurs en trois dimensions

Un système de coordonnées en trois dimensions se compose de trois axes : l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z. Les trois axes pointent dans des directions perpendiculaires les unes aux autres, comme illustré dans la figure 7.9.

Le vecteur $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ décrit les instructions de déplacement suivantes : « Déplacez-vous de v_x unités dans le sens de l'axe des x, puis v_y unités le long de l'axe des y, et enfin v_z unités dans le sens de l'axe des z. »

En dimension trois, il y a trois vecteurs unitaires qui représentent « un pas » le long de chacun des axes :

$$\hat{\imath} = (1, 0, 0), \qquad \hat{\jmath} = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad \hat{k} = (0, 0, 1).$$

On peut donc écrire le vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ en terme des vecteurs unitaires ainsi $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$.

La représentation par longueur et direction que nous avons utilisée pour les vecteurs en dimension deux (coordonnées polaires), peut être généralisée pour trois dimensions en introduisant les *coordonnées sphériques*

Since points describe locations in the Cartesian plane, it doesn't make sense to "add" them. What would it mean to add two points? It makes sense to add two vectors though, and the sum vector $\vec{u} + \vec{v}$ corresponds to the combined displacement of $\vec{u}$ followed by $\vec{v}$.

It also makes sense to add a vector to a point, which corresponds to starting from the location of the point and performing the vector displacement. Let's look at an example calculation that combines points and vectors. The distance between the points $P = (P_x,P_y)$ and $Q = (Q_x,Q_y)$ can be calculated from Pythagoras theorem : $d(P,Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$. Another way to calculate the distance between P and Q is to define the displacement vector that starts at P and ends at Q : $\overrightarrow{PQ} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y)$. The following equation holds

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

This equation tells us that starting at the point P and performing the displacement $\overrightarrow{PQ}$ will bring us to the point Q. To find the distance between the points P and Q you can calculate the length of the vector $\overrightarrow{PQ}$, which gives you the same result $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$.

Vectors in three dimensions

A three dimensional coordinate system consists of three axes. The x-axis, the y-axis, and the z-axis. The three axes point in perpendicular directions to each other, as illustrated in Figure 7.9.

The vector $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ describes the following displacement instructions : "Move v_x units in the direction of the x-axis, then move v_y along the y-axis, and finally move v_z in the direction of the z-axis." In three dimensions, there are three unit vectors that describe one step in the direction of each of the axes :

$$\hat{\imath} = (1, 0, 0), \qquad \hat{\jmath} = (0, 1, 0) \quad \text{and} \quad \hat{k} = (0, 0, 1).$$

We can therefore describe the vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ in terms of unit vectors as follows $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$.

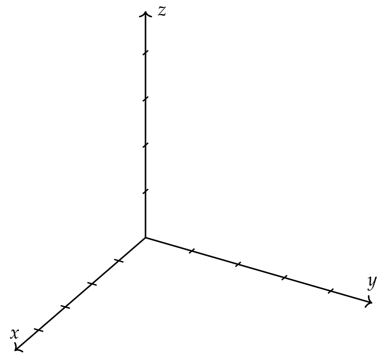

FIGURE 7.9 Système de coordonnées à trois dimensions avec les axes x, y et z qui sont perpendiculaires. Les points et les vecteurs en 3D vivent ici.

(r, θ, ϕ) ou les *coordonnées cylindriques* (r, θ, z). Nous n'en dirons pas plus ici sur ce sujet, mais vous pouvez explorer ces concepts par vous-même si vous êtes intéressé.

Vecteurs en dimension n

Les vecteurs que vous rencontrerez le plus souvent en mathématiques et en physique sont en dimension deux ou trois. Dans d'autres domaines scientifiques comme la génétique et l'apprentissage automatique, il est courant d'étudier les vecteurs dans des espaces avec beaucoup plus de dimensions. Dans un espace à n dimensions, un vecteur serait de la forme

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Par exemple, dans le domaine de l'apprentissage automatique, les « données riches » comme les images, les vidéos et les textes sont souvent représentées par des vecteurs avec des milliers de dimensions. Les opérations d'algèbre vectorielle que vous avez apprises dans cette section s'appliquent aussi à ces vecteurs multidimensionnels.

Vecteurs et coordonnées

Un dernier point de clarification que j'aimerais regarder avec vous est la relation entre la notion abstraite de vecteur $\vec{v}$ et sa représentation concrète comme un triple de coordonnées (v_x, v_y, v_z). Est-ce que le vecteur

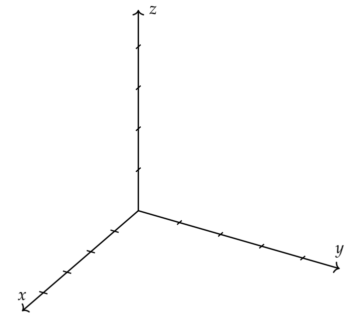

FIGURE 7.9 A three-dimensional coordinate system with x, y, and z axes.

The length-and-direction representation that we used for two-dimensional vectors (polar coordinates), can be generalized to three dimensions by introducing *spherical coordinates* (r,θ,ϕ) or *cylindrical coordinates* (r,θ,z). We won't go into these further, but you can read about them on your own if you're interested.

High dimensional vectors

The most common types of vectors you'll encounter in math and physics are two-dimensional and three-dimensional vectors. In other fields of science like genetics and machine learning, it is common to see vectors with many more dimensions. An example of a n-dimensional real vector is

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

For example, in machine learning we often represent "rich data" like images, videos, and text as vectors with thousands of dimensions. The vector algebra operations you learned in this section also apply to these high dimensional vectors.

Vectors vs. their coordinates

One final point of clarification that we need to look into, is the relationship between the abstract notion of the vector $\vec{v}$ and its concrete representations as a triple of coordinates (v_x,v_y,v_z). Is a

$\vec{v}$ est la même chose que ses coordonnées v_x, v_y et v_z ? Révisons les concepts sur les vecteurs pour y voir plus clair.

Supposons que vous souhaitiez utiliser un vecteur pour décrire la vitesse d'un objet dans un problème de physique, par exemple la vitesse d'une balle de tennis. Notez que le vecteur vitesse $\vec{v}$ existe sans référence à aucun système de coordonnées — c'est la vitesse de la balle dans le monde réel.

Ensuite vous choisissez un système de coordonnées x, y, z pour décrire le terrain de tennis. Le fait de définir un système de coordonnées pour l'espace vous permet de représenter le vecteur $\vec{v}$ par un triplet de coordonnées (v_x, v_y, v_z), qui est interprété de la façon suivante : « La balle se déplace avec une vitesse v_x dans la direction x, une vitesse v_y dans la direction y et v_z dans la direction z. » Vous pouvez aussi décrire la vitesse à l'aide de vecteurs unitaires : $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$. Vous pouvez maintenant faire toutes sortes de calculs en utilisant les coordonnées (v_x, v_y, v_z) dans le cadre de la résolution du problème de physique.

Supposons que vous vouliez décrire le vecteur de vitesse $\vec{v}$ à un collègue via un message texte. En regardant sur votre feuille de calculs, vous trouvez les données $\vec{v} = (60, 3, -2)$ mesurées en mètres par seconde, et vous envoyez ce message à votre collègue :

```
La vitesse est (60,3,-2) mètres par seconde.
```

Quelques minutes plus tard, la réponse suivante revient :

```
Attends, quel est le système de coordonnées utilisé?
```

En effet, les informations que vous avez envoyées ne sont pas suffisantes, puisque les composantes du vecteur dépendent du système de coordonnées dans lequel il est représenté. Le triplet de nombres $(60, 3, -2)$ n'a de sens que si vous connaissez les directions des axes du système de coordonnées x, y, z. Réalisant votre erreur, vous renvoyez un autre message avec toutes les informations requises :

```
En utilisant un système de coordonnées centré sur le poteau
sud du filet, avec l'axe des x pointant vers l'est le long
du terrain de jeu, l'axe y pointant vers le nord le long
du filet et l'axe z mesurant la hauteur au dessus du sol,
la vitesse est de (60,3,-2) mètres par seconde.
```

Quelques secondes plus tard vous obtenez la confirmation :

vector the same thing as its coordinates v_x, v_y, and v_z? Let's go over the whole vectors story one last time to tie things together.

Suppose you want to use vector math to describe the velocity of some object while solving a real-world physics situation, like avoiding being hit by a tennis ball. The velocity vector $\vec{v}$ exists on its own without reference to any coordinate system — it's the ball's velocity.

Enter the xyz-coordinate system, who is the main actor in this story. By choosing a coordinate system for the real-world space, you can represent the vector $\vec{v}$ as a coordinates triple (v_x,v_y,v_z), which is interpreted as the following description : "The ball is moving with velocity v_x units in the x-direction, v_y units in the y-direction, and v_z units in the z-direction." The notation using unit vectors makes the instructions very easy to write : $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$. You can now do all kinds of calculations using the velocity coordinates (v_x,v_y,v_z) as part of solving the physics problem.

Suppose you want to describe the velocity vector $\vec{v}$ to a fellow physicist via a text message. Looking up your sheet of calculations, you find the values $\vec{v} = (60,3,-2)$, which you know were measured in metres per second so you send this message :

```
The velocity is (60,3,-2) measured in metres per second.
```

A few minutes later the following reply comes back :

```
Wait whaaat??? What coordinate system are you using?
```

Indeed the information you sent is not enough. Vector components depend on the coordinate system in which the vectors are represented. The triple of numbers $(60,3,-2)$ only makes sense if you know the directions of the axes in the xyz-coordinate system. Realizing your mistake, you reply with a text message that has all the required information :

```
Using the coordinate system centred at the south post of
the net, with the x-axis pointing east along the court,
the y-axis pointing north along the net, and the z-axis
pointing up, the velocity is (60,3,-2) in metres per second.
```

A few seconds get it you get the reply :

```
OK got it now. Thx!
```

```
OK maintenant j'ai compris. Merci !
```

La situation hypothétique ci-dessus illustre l'importance du système de coordonnées utilisé pour décrire les vecteurs. Il faut connaître les directions des vecteurs unitaires $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ et $\hat{k}$ pour pouvoir interpréter les instructions $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$.

En fait, utiliser le système de coordonnées x, y, z et les vecteurs $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ n'est qu'une des nombreuses façons possibles de représenter les vecteurs. Nous pouvons représenter un vecteur $\vec{v}$ par les coefficients (v_1, v_2, v_3) par rapport à n'importe quelle *base* $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ en utilisant l'expression $\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$, qui correspond aux instructions : « Déplacez-vous v_1 unités en direction de $\hat{e}_1$, v_2 unités en direction de $\hat{e}_2$, et v_3 unités en direction de $\hat{e}_3$. »

Qu'est-ce que c'est qu'une base, demandez-vous ? Je suis heureux que vous le demandiez, parce que c'est ce que nous allons étudier dans la prochaine section.

7.3 Bases

Un des concepts les plus importants dans l'étude des vecteurs est celui de *base*. Considérons l'espace vectoriel à trois dimensions $\mathbb{R}^3$. Une *base* de $\mathbb{R}^3$ est un ensembles de vecteurs $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ dont on peut se servir comme système de coordonnées pour $\mathbb{R}^3$. Si l'ensemble des vecteurs $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ est une base, on peut *représenter* n'importe quel vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ par ses coefficients (v_1, v_2, v_3) *par rapport à* cette base :

$$\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3.$$

Le vecteur $\vec{v}$ s'obtient en portant v_1 dans la direction $\hat{e}_1$, v_2 dans la direction $\hat{e}_2$ et v_3 dans la direction $\hat{e}_3$.

Vous êtes déjà familiers avec la base *standard* $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$, qui est associée au système de coordonnées x, y, z, et vous savez que tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ peut être exprimé par trois nombres (v_x, v_y, v_z) qui sont ses coordonnées dans la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ et vérifient $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$. Le but principal dans cette section sera de vous informer qu'il existe d'autres bases (systèmes de coordonnées), et de vous donner l'habitude de demander « Par rapport à quel système de coordonnées ? » chaque fois que vous voyez un triplet de nombres comme (a, b, c).

The above hypothetical situation illustrates the importance of keeping in mind the coordinate system that is used to describe vectors. You need to know the real-world directions of the unit vectors $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, and $\hat{k}$ in order to interpret the instructions $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$.

It turns out, using the xyz-coordinate system and the three vectors $\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$ is just one of many possible ways we can represent vectors. We can represent a vector $\vec{v}$ as coefficients (v_1,v_2,v_3) with respect to any *basis* $\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}$ using the expression $\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$, which corresponds to the instructions : "Move v_1 units in the direction of $\hat{e}_1$, move v_2 units in the direction of $\hat{e}_2$, and v_3 units in the direction of $\hat{e}_3$."

What is a basis, you ask ? I'm glad you asked, because this is the subject of the next section.

7.3 Basis

One of the most important concepts in the study of vectors is the concept of a *basis*. Consider the three-dimensional vector space $\mathbb{R}^3$. A *basis* for $\mathbb{R}^3$ is a set of vectors $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ that can be used as a coordinate system for $\mathbb{R}^3$. If the set of vectors $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ is a basis, then you can *represent* any vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ as coefficients (v_1,v_2,v_3) *with respect to* that basis :

$$\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3.$$

The vector $\vec{v}$ is obtained by measuring out a distance v_1 in the $\hat{e}_1$ direction, a distance v_2 in the $\hat{e}_2$ direction, and a distance v_3 in the $\hat{e}_3$ direction.

You are already familiar with the *standard* basis $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$, which is associated with the xyz-coordinate system. You know that any vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ can be expressed as a triple (v_x,v_y,v_z) with respect to the basis $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ through the formula $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$. The whole point of this section is to let you know that other bases (coordinate systems) exist, and to get you into the habit of asking "with respect to which coordinate system ?" every time you see a coordinate vector (a,b,c).